علامہ اقبال اوپن یونیورسٹی، اسلام آباد
شعبۂ ریاضی • کلیۂ سائنس

کاروباری ریاضی

متوقع سوالات اور ان کے حل

کورس کوڈ 1429 (بعض اوقات 5405) • یونٹ 1 تا 9

بی اے • بی کام • اے ڈی سی • بی ایس

یہ کتابچہ کیا ہے؟ یہ اے آئی او یو کی سرکاری درسی کتاب کاروباری ریاضی (کورس کوڈ 5405/1429، شعبۂ ریاضی، اے آئی او یو اسلام آباد، اشاعت 2023) کے ہر یونٹ کے آخر میں دیے گئے Self Assessment Questions میں سے سب سے اہم اور متوقع سوالات کا مختصر حل ہے۔

یہی سوالات کیوں؟ یونیورسٹی اپنے سمسٹر کے اسائنمنٹ اور فائنل پرچہ اسی ذخیرے سے بناتی ہے۔ اس لیے کتاب کے انہی سوالات کی مشق دراصل پرچے ہی کی مشق ہے۔

تفصیلی ایڈیشن۔ تمام نو یونٹوں کے مکمل حل (انگریزی، 84 صفحات) الگ فائل AIOU_1429_Solved_QuestionBank.pdf میں موجود ہیں۔ یہ اردو کتابچہ اسی کا مختصر خلاصہ ہے۔

حیثیت۔ یہ ذاتی مطالعے کے لیے تیار کیا گیا ہے۔ یہ اے آئی او یو کی مطبوعہ کتاب نہیں اور نہ ہی اسے یونیورسٹی کی توثیق حاصل ہے۔ اسے من و عن نقل کر کے اسائنمنٹ میں جمع کرانا منع ہے۔

اسے کیسے استعمال کریں

سوال پڑھیے۔ حل کو ہاتھ یا کاغذ سے ڈھانپ لیجیے۔ پہلے خود کاپی پر حل کیجیے۔ اس کے بعد ملائیے۔ صرف حل پڑھ لینے سے سیکھنے کا گمان تو ہوتا ہے مگر امتحان میں کام وہی آتا ہے جو ناکام کوشش کے بعد سمجھ آیا ہو۔

اس کتابچے میں تین چیزیں اسی مقصد کے لیے رکھی گئی ہیں:

- **جواب کا خانہ (سبز)** --- آخری نتیجہ الگ نمایاں ہے، تاکہ آپ طریقہ پڑھے بغیر صرف اپنا جواب ملا سکیں۔
- **پڑتال کی سطر** --- جواب کو اصل مساوات میں واپس رکھ کر جانچا گیا ہے۔ اے آئی او یو طریقۂ کار کے نمبر دیتی ہے، اور پڑتال سے علامت (sign) کی غلطی ممتحن سے پہلے آپ کو پکڑ میں آ جاتی ہے۔
- **عام غلطی (سرخ)** --- اس قسم کے سوال میں بار بار ہونے والی مخصوص غلطی۔ یہ خانے حل سے زیادہ قیمتی ہیں۔

اسائنمنٹ میں نقل نہ کریں

اے آئی او یو سرقہ (plagiarism) کی جانچ کرتی ہے، اور یہ حل عام دستیاب ہیں۔ ان کا مقصد صرف یہ ہے کہ آپ اپنا کام جانچ سکیں اور وہ قدم پہچان سکیں جہاں آپ کا طریقہ ٹوٹتا ہے۔ طریقہ سیکھیے، حساب اپنا لکھیے۔

پرچے میں کس یونٹ کا کتنا وزن ہے

پرچہ نو کے نو یونٹوں سے آتا ہے، مگر برابر نہیں۔ ذیل کی ترتیب کتاب کے اپنے وزن اور گردش کرتے پرانے پرچوں سے مطابقت رکھتی ہے۔

یونٹ اور موضوع	وزن	اصل امتحان کس چیز کا ہے
1 --- احتمال	زیادہ	جمع کا اصول بمقابلہ ضرب کا اصول
2 --- بے ترتیب متغیر	درمیانہ	احتمالات کا مجموعہ ہمیشہ 1
3 --- مساوات و عدم مساوات	درمیانہ	علامت کا الٹنا، مطلق قدر کی دو صورتیں
4 --- خطی مساوات	زیادہ	پہلے میلان، پھر ایک نقطہ
5 --- میٹرکس	زیادہ	ضرب کے لیے ابعاد کا میل
6 --- محدد اور معکوس	زیادہ	ہم عاملوں کی علامت؛ کریمر کا اصول
7 --- تفرق	زیادہ	تقسیم کے اندر زنجیری اصول
8 --- جزوی مشتق	درمیانہ	دوسرے متغیر کو ثابت رکھنا
9 --- بہتر بندی	زیادہ	دوسرے مشتق کی جانچ، ہمیشہ

یونٹ 4، 5، 6، 7 اور 9 مل کر زیادہ تر نمبر اور تمام طویل سوالات اٹھاتے ہیں۔ اگر وقت کم ہو تو تیاری اسی ترتیب سے کیجیے۔

یونٹ 1: احتمال

چار اصول جن پر پورا یونٹ کھڑا ہے

متمم :	$P(A') = 1 - P(A)$	
جمع (عام) :	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	
ضرب (آزاد) :	$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$	
مشروط :	$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$	

اگر دو واقعات باہم خارج ہوں تو $P(A \cap B) = 0$ اور جمع کا اصول سادہ ہو کر $P(A) + P(B)$ رہ جاتا ہے۔

سوال 1

پائلٹ اسکول میں داخلے کا احتمال 0.5 ہے۔ اگر تین امیدوار بے ترتیب چنے جائیں تو احتمال نکالیے کہ **(الف)** تینوں کو داخلہ ملے، **(ب)** کسی کو نہ ملے، **(ج)** صرف ایک کو ملے۔

حل

تینوں امیدوار ایک دوسرے سے آزاد ہیں، اس لیے احتمالات آپس میں ضرب ہوں گے۔

(الف) تینوں کو داخلہ ملنے کی صرف ایک صورت ہے:

$$(0.5)(0.5)(0.5) = (0.5)^3 = 0.125$$

(ب) کسی کو نہ ملنے کی بھی ایک ہی صورت ہے:

$$(0.5)^3 = 0.125$$

(ج) "صرف ایک" میں یہ بھی گننا ہے کہ وہ ایک کون ہے --- پہلا، دوسرا یا تیسرا۔ یعنی تین صورتیں:

$$\binom{3}{1}(0.5)^1(0.5)^2 = 3(0.125) = 0.375$$

✓ **پڑتال:** چاروں صورتیں $0, 1, 2, 3$ مل کر پوری نمونہ فضا بنتی ہیں: $0.125 + 0.375 + 0.375 + 0.125 = 1$۔

جواب: (الف) 0.125 (ب) 0.125 (ج) 0.375

عام غلطی

حصہ (ج) میں $\binom{3}{1} = 3$ سے ضرب لازمی ہے۔ (الف) اور (ب) میں یہ ضرب نہیں لگتی، کیونکہ "سب" یا "کوئی نہیں" کی صرف ایک ہی ترتیب ممکن ہے۔

سوال 2

ایک مرتبان میں 8 سبز نقطہ دار، 10 سبز دھاری دار، 12 نیلی نقطہ دار اور 10 نیلی دھاری دار گیندیں ہیں۔ ایک گیند بے ترتیب نکالی جائے تو احتمال کیا ہے کہ وہ **(الف)** سبز یا دھاری دار ہو، **(ب)** نقطہ دار ہو، **(ج)** نیلی یا نقطہ دار ہو؟

حل

سب سے پہلے اعداد کو دو رخی جدول میں رکھیے۔ اس سوال کے تقریباً سارے نمبر اسی قدم پر ملتے یا کھوتے ہیں۔

	نقطہ دار	دھاری دار	کل
سبز	8	10	**18**
نیلی	12	10	**22**
کل	**20**	**20**	**40**

(الف) سبز اور دھاری دار میں اشتراک ہے (10 گیندیں دونوں میں ہیں)، اس لیے عام جمع کا اصول لگے گا:

$$P(G \cup S) = \frac{18}{40} + \frac{20}{40} - \frac{10}{40} = \frac{28}{40} = 0.70$$

(ب) سیدھا ستون کے کل سے:

$$P(D) = \frac{20}{40} = 0.50$$

(ج) اشتراک 12 نیلی نقطہ دار گیندیں ہیں:

$$P(B \cup D) = \frac{22}{40} + \frac{20}{40} - \frac{12}{40} = \frac{30}{40} = 0.75$$

✓ **پڑتال:** براہِ راست گنتی سے: سبز یا دھاری دار $= 8 + 10 + 10 = 28$؛ نیلی یا نقطہ دار $= 12 + 10 + 8 = 30$۔ دونوں مطابقت رکھتے ہیں۔

جواب: (الف) 0.70 (ب) 0.50 (ج) 0.75

سوال 3

اگر $P(E) = 0.2$، $P(F) = 0.5$ اور $P(E \cup F) = 0.6$ ہو تو نکالیے **(الف)** $P(E \cap F)$، **(ب)** $P(E \mid F)$، **(ج)** $P(F \mid E)$۔

حل

(الف) جمع کے عام اصول کو الٹ کر اشتراک کو مطلوب بنائیے:

$$P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F) = 0.2 + 0.5 - 0.6 = 0.1$$

(ب) $P(E \mid F) = \dfrac{0.1}{0.5} = 0.2$

(ج) $P(F \mid E) = \dfrac{0.1}{0.2} = 0.5$

ایک اضافی نکتہ جس کے نمبر ملتے ہیں۔ غور کیجیے کہ $P(E \mid F) = 0.2 = P(E)$ اور $P(F \mid E) = 0.5 = P(F)$ ہے۔ یعنی ایک واقعے کا علم دوسرے کے بارے میں کچھ نہیں بتاتا۔ برابر کی بات: $P(E)\,P(F) = (0.2)(0.5) = 0.1 = P(E \cap F)$۔ لہذا E اور F **آزاد واقعات** ہیں۔

جواب: (الف) 0.1 (ب) 0.2 (ج) 0.5؛ اور E, F آزاد ہیں۔

یونٹ 2: بے ترتیب متغیر

کوئی فہرست احتمالی تقسیم کب کہلاتی ہے

دو شرطیں پوری ہونی چاہییں --- ہر x کے لیے

$$\sum_x P(X = x) = 1. \qquad \text{اور} \qquad 0 \le P(X = x) \le 1,$$

دوسری شرط ہی مفقود قدر والے سوالات کا پورا حل ہے، اور باقی سوالات میں حساب کی غلطی پکڑنے کا مفت ذریعہ۔

سوال 4

ایک کھرا سکہ تین بار اچھالا جاتا ہے۔ X سے مراد چِتوں کی تعداد ہے۔ احتمالی تقسیم بنائیے اور $P(X \geq 2)$ نکالیے۔

حل

کل $2^3 = 8$ یکساں ممکن نتائج ہیں۔ انہیں لکھ دینے سے گنتی مشکوک نہیں رہتی:

x	نتائج	تعداد	$P(X = x)$
0	TTT	1	1/8
1	HTT, THT, TTH	3	3/8
2	HHT, HTH, THH	3	3/8
3	HHH	1	1/8
کل		**8**	**1**

"دو یا زیادہ" کا مطلب $X = 2$ یا $X = 3$ ہے، اور یہ باہم خارج ہیں:

$$P(X \geq 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

جواب: تقسیم: $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$؛ اور $P(X \geq 2) = 0.5$

سوال 5

ایک تھیلے میں 4 سرخ اور 6 کالی گیندیں ہیں۔ بغیر واپسی کے 4 گیندوں کا نمونہ لیا جاتا ہے۔ X سرخ گیندوں کی تعداد ہو تو X کی احتمالی تقسیم نکالیے۔

حل

بغیر واپسی کے نمونہ لینے سے یہ دو ذی حدی نہیں بلکہ hypergeometric تقسیم بنتی ہے:

$$P(X=x)=\frac{\binom{4}{x}\binom{6}{4-x}}{\binom{10}{4}}, \qquad \binom{10}{4}=210$$

x	کنندہ شمار	$P(X=x)$	اعشاری
0	$\binom{4}{0}\binom{6}{4}=15$	$15/210=1/14$	0714.0
1	$\binom{4}{1}\binom{6}{3}=80$	$80/210=8/21$	3810.0
2	$\binom{4}{2}\binom{6}{2}=90$	$90/210=3/7$	4286.0
3	$\binom{4}{3}\binom{6}{1}=24$	$24/210=4/35$	1143.0
4	$\binom{4}{4}\binom{6}{0}=1$	$1/210$	0048.0
کل		**210/210**	**0000.1**

✓ **پڑتال:** $15+80+90+24+1=210=\binom{10}{4}$۔ مجموعہ 1 ہے، تقسیم درست ہے۔

جواب: $P(0)=\frac{1}{14}$، $P(1)=\frac{8}{21}$، $P(2)=\frac{3}{7}$، $P(3)=\frac{4}{35}$، $P(4)=\frac{1}{210}$

عام غلطی

اسے دو ذی حدی (binomial) مان کر $p = 4/10$ لگانے سے $P(2) = 0.3456$ آتا ہے جو غلط ہے۔ دو ذی حدی کے لیے p کا ہر بار ایک جیسا رہنا ضروری ہے، جو صرف واپسی کے ساتھ ہوتا ہے۔

سوال 6

$X = 0, 2, 4, 6, 8$ کے احتمالات بالترتیب $K,\ 2K,\ 4K,\ 2K,\ K$ ہیں۔ K نکال کر تقسیم دوبارہ لکھیے۔

حل

احتمالات کا مجموعہ 1 ہونا چاہیے:

$$K + 2K + 4K + 2K + K = 1 \implies 10K = 1 \implies K = 0.1$$

x	0	2	4	6	8
$P(X = x)$	1.0	2.0	4.0	2.0	1.0

✓ **پڑتال:** $0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.2 + 0.1 = 1.0$، اور ہر قدر $[0, 1]$ میں ہے۔ تقسیم $x = 4$ کے گرد متناسب ہے، اس لیے $E(X) = 4$۔

جواب: $K = 0.1$؛ تقسیم $0.1,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.2,\ 0.1$

یونٹ 3: مساوات اور عدم مساوات

سوال 7

حل کیجیے: **(الف)** $t^2 + 4t = 21$ (تحلیل سے)، **(ب)** $4x^2 + 3x - 1 = 0$ (دو درجی فارمولے سے)۔

حل

(الف) پہلے سب کچھ ایک طرف کیجیے --- تحلیل صرف صفر کے مقابل چلتی ہے:

$$t^2 + 4t - 21 = 0$$

دو عدد جن کا حاصل ضرب -21 اور جمع $+4$ ہو: $+7$ اور -3۔

$$(t+7)(t-3) = 0 \implies t = -7 \text{ یا } t = 3$$

✓ **پڑتال:** $(-7)^2 + 4(-7) = 49 - 28 = 21$؛ $3^2 + 4(3) = 9 + 12 = 21$۔

(ب) $a = 4,\ b = 3,\ c = -1$۔ پہلے ممیز نکالیے، وہ بتا دیتا ہے کہ جواب کس قسم کا آئے گا:

$$b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 > 0 \quad \text{(دو حقیقی جڑیں)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8} \implies x = \frac{1}{4} \text{ یا } x = -1$$

جواب: (الف) $t = -7,\ 3$ (ب) $x = \frac{1}{4},\ -1$

سوال 8

دو درجی عدم مساوات حل کیجیے: $6t^2 + t - 12 > 0$

حل

پہلے جڑیں نکالیے۔ ممیز $= 1 + 288 = 289$، $\sqrt{289} = 17$:

$$t = \frac{-1 \pm 17}{12} \implies t = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \quad \text{یا} \quad t = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2}$$

t^2 کا عامل $6 > 0$ ہے، اس لیے قطع مکافی اوپر کو کھلتا ہے: وہ جڑوں کے درمیان محور سے نیچے اور جڑوں سے باہر محور سے اوپر ہوتا ہے۔ ہمیں > 0 یعنی اوپر والا حصہ چاہیے:

$$t < -\frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad t > \frac{4}{3}$$

✓ **پڑتال:** $t = 0$ (جڑوں کے بیچ) رکھیے: -12 آتا ہے، جو $0 >$ نہیں --- درست طور پر خارج۔ $t = 2$ رکھیے: $24 + 2 - 12 = 14 > 0$ --- درست طور پر شامل۔

جواب: $t < -\frac{3}{2}$ یا $t > \frac{4}{3}$

سوال 9

حل کیجیے: **(الف)** $|2y + 5| = |y - 4|$، **(ب)** $|z^2 - 8| \le 8$

حل

(الف) $|u| = |v|$ ہمیشہ دو صورتوں میں بٹتا ہے:

پہلی صورت: $2y + 5 = y - 4 \Rightarrow y = -9$

دوسری صورت: $2y + 5 = -(y - 4) = -y + 4 \Rightarrow 3y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

✓ **پڑتال:** $y = -9$: $|-13| = 13$ اور $|-13| = 13$۔ $y = -\frac{1}{3}$: دونوں طرف $\frac{13}{3}$۔

(ب) $|u| \le a$ اندر کی طرف بند ہوتا ہے، یعنی $-a \le u \le a$:

$$-8 \le z^2 - 8 \le 8 \implies 0 \le z^2 \le 16$$

بایاں حصہ $z^2 \ge 0$ ہر حقیقی z کے لیے خود بخود درست ہے اور کوئی پابندی نہیں لگاتا۔ دایاں حصہ دیتا ہے:

$$z^2 \le 16 \implies -4 \le z \le 4$$

جواب: (الف) $y = -9,\ -\frac{1}{3}$ (ب) $-4 \le z \le 4$

عام غلطی

$|u| \le a$ ایک وقفہ دیتا ہے، $|u| \ge a$ باہر کی طرف کھل کر دو وقفے دیتا ہے۔ ان دونوں کو الٹ دینے سے جواب سراسر الٹ جاتا ہے۔

یونٹ 4: خطی مساوات

پہلے میلان، پھر ایک نقطہ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad y - y_1 = m(x - x_1), \qquad y = mx + c$$

متوازی خطوط: $m_1 = m_2$۔ عمود خطوط: $m_1 m_2 = -1$۔ اس یونٹ کا ہر "خط کی مساوات نکالیے" والا سوال بس یہی دو قدم ہے۔

سوال 10

صابن کی طلب $p = 15 - \frac{7}{6}q$ اور رسد $p = \frac{2}{3}q$ سے دی گئی ہے، جہاں p قیمت اور q مقدار ہے۔ توازنی قیمت اور توازنی مقدار نکالیے۔

حل

منڈی وہاں صاف ہوتی ہے جہاں طلب اور رسد برابر ہو جائیں، یعنی جہاں دونوں خط ایک دوسرے کو کاٹیں:

$$15 - \frac{7}{6}q = \frac{2}{3}q$$

کسور ختم کرنے کے لیے پورے کو 6 سے ضرب دیجیے:

$$90 - 7q = 4q \implies 90 = 11q \implies q^* = \frac{90}{11} \approx 8.18 \text{ اکائیاں}$$

$$p^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{90}{11} = \frac{60}{11} \approx 5.45 \text{ ڈالر}$$

✓ **پڑتال:** طلب کی طرف سے: $15 - \frac{7}{6} \cdot \frac{90}{11} = 15 - \frac{105}{11} = \frac{60}{11}$۔ دونوں منحنی متفق ہیں، اس لیے تقاطع درست ہے۔

جواب: $q^* = \frac{90}{11} \approx 8.18$ اکائیاں، $p^* = \frac{60}{11} \approx \$5.45$

سوال 11

درج ذیل خصوصیات والے خط کی مساوات نکالیے: **(الف)** $(-1,3)$ سے گزرتا ہو اور $y = 4x - 5$ کے متوازی ہو؛ **(ب)** $(-5,4)$ سے گزرتا ہو اور $2y = x + 1$ پر عمود ہو؛ **(ج)** $(2,-8)$ سے گزرتا ہو اور $x = -4$ کے متوازی ہو۔

حل

(الف) متوازی خطوط کا میلان ایک ہوتا ہے، اس لیے $m = 4$:

$$y - 3 = 4(x + 1) \implies y = 4x + 7$$

(ب) $2y = x + 1$ کو $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ لکھیے، اس کا میلان $\frac{1}{2}$ ہے۔ عمود کا میلان منفی معکوس ہے:

$$m = -\frac{1}{1/2} = -2 \implies y - 4 = -2(x + 5) \implies y = -2x - 6$$

(ج) $x = -4$ ایک عمودی خط ہے جس کا کوئی میلان ہوتا ہی نہیں۔ اس کے متوازی خط بھی عمودی ہو گا اور دیے گئے نقطے کی x قدر سے گزرے گا:

$$x = 2$$

جواب: (الف) $y = 4x + 7$ (ب) $y = -2x - 6$ (ج) $x = 2$

عام غلطی

حصہ (ج) اکثر امیدواروں کو پکڑ لیتا ہے۔ $m_1 m_2 = -1$ کا اصول عمودی خطوط پر لاگو نہیں ہوتا، کیونکہ عمودی خط کا میلان غیر معین ہے۔ جواب $x =$ ثابت ہوتا ہے، اور وہ ثابت نقطے کی x قدر سے آتا ہے، y سے نہیں۔

سوال 12

ایک کمپنی کرسیاں بناتی ہے۔ ہفتہ وار ثابت لاگت \$1,100 اور فی کرسی متغیر لاگت \$40 ہے۔ x کرسیوں کی کل ہفتہ وار لاگت لکھیے۔ \$4,500 میں کتنی کرسیاں بن سکتی ہیں؟

حل

خطی لاگت کا ڈھانچہ یہ ہے کہ متغیر لاگت میلان بنتی ہے اور ثابت لاگت قاطع:

$$C(x) = 40x + 1100$$

$$40x + 1100 = 4500 \implies 40x = 3400 \implies x = 85$$

✓ **پڑتال:** $40(85) + 1100 = 3400 + 1100 = 4500$۔

جواب: $C(x) = 40x + 1100$؛ $\$4{,}500$ میں **85 کرسیاں** بنتی ہیں۔

سوال 13

جان نے نئی گاڑی خریدی۔ 7.5% سیلز ٹیکس اور $\$150$ رجسٹریشن فیس ملا کر کل $\$25{,}868.50$ ادا کیے۔ گاڑی کی اصل قیمت کیا تھی؟

حل

فرض کیجیے ٹیکس سے پہلے قیمت P ہے۔ ٹیکس P پر لگتا ہے اور فیس بعد میں جمع ہوتی ہے:

$$P + 0.075P + 150 = 25{,}868.50$$

$$1.075P = 25{,}718.50 \implies P = \frac{25{,}718.50}{1.075} = 23{,}924.19$$

✓ **پڑتال:** $23{,}924.19 + 1{,}794.31 + 150 = 25{,}868.50$۔

جواب: گاڑی کی اصل قیمت تقریباً **$23,924.19** تھی۔

عام غلطی

کل رقم میں سے 7.5% گھٹانا غلط ہے۔ $25{,}718.50 \times 0.925$ سے 23,789.61 آتا ہے جو درست نہیں، کیونکہ ٹیکس بڑی (کل) رقم پر نہیں بلکہ چھوٹی (اصل) قیمت پر لگا تھا۔ ہمیشہ $1 + r$ سے تقسیم کیجیے، $1 - r$ سے ضرب نہیں۔

یونٹ 5: میٹرکس

ابعاد کا میل، اور وہ اصول جو حساب جیسا نہیں

$A_{m\times n}B_{n\times p}$ کی ضرب تبھی ممکن ہے جب اندرونی ابعاد برابر ہوں، اور حاصل ضرب $m \times p$ ہوتا ہے۔

جمع اور عددی ضرب عام حساب جیسی ہیں۔ میٹرکس کی ضرب نہیں: عموماً $AB \neq BA$۔ منقلب کے اصول اسی سے نکلتے ہیں:

$$(A+B)^t = A^t + B^t, \qquad (A^t)^t = A, \qquad \boxed{(AB)^t = B^t A^t}$$

آخری اصول میں ترتیب الٹ جاتی ہے۔ یہی بات معکوس پر بھی لاگو ہے: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$۔

سوال 14

اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ اور $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ ہوں تو AB نکالیے، اور تصدیق کیجیے کہ $(A+B)^t = A^t + B^t$۔

حل

AB کی ضرب۔ A کی سطر کو B کے ستون سے ضرب دیجیے۔ پہلی سطر $(1,\ 2,\ 3)$ کو B کے تینوں ستونوں کے ساتھ:

$$(1)(4) + (2)(1) + (3)(3) = 4 + 2 + 9 = 15$$

$$(1)(-1) + (2)(4) + (3)(-3) = -1 + 8 - 9 = -2$$

$$(1)(1) + (2)(3) + (3)(-2) = 1 + 6 - 6 = 1$$

اسی طرح دوسری اور تیسری سطر کے لیے:

$$AB = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 1 \\ 3 & -16 & -13 \\ 31 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

تصدیق۔

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A+B)^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

دونوں برابر ہیں۔

جواب: $AB = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 1 \\ 3 & -16 & -13 \\ 31 & -2 & 5 \end{pmatrix}$، اور $(A+B)^t = A^t + B^t$ تصدیق شدہ۔

عام غلطی

$(AB)^t = B^t A^t$ ہے، $A^t B^t$ نہیں۔ یہ الٹ پھیر کوئی رواج نہیں، ابعاد کے میل کی مجبوری ہے --- غلط ترتیب سے اکثر تو میٹرکس کی شکل ہی غلط بنتی ہے۔

سوال 15

برگر بارن کی تین شاخیں فرائز، برگر اور مشروب بیچتی ہیں۔ روزانہ فروخت یہ ہے: شاخ I --- 500 فرائز، 150 برگر، 300 مشروب؛ شاخ II --- 900، 440، 830؛ شاخ III --- 700، 580، 1200۔ قیمتیں بالترتیب \$0.92، \$1.54 اور \$0.58 ہیں۔ تینوں شاخوں کی کل روزانہ آمدنی نکالیے۔

حل

فروخت کو 3×3 میٹرکس (سطر = شاخ) اور قیمتوں کو 3×1 ستون میں لکھیے۔ اندرونی ابعاد $3 = 3$ ہیں، اس لیے حاصل ضرب 3×1 --- یعنی ہر شاخ کی ایک آمدنی:

$$SP^t = \begin{pmatrix} 500 & 150 & 300 \\ 900 & 440 & 830 \\ 700 & 580 & 1200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.92 \\ 1.54 \\ 0.58 \end{pmatrix}$$

$$\text{شاخ I} : 460 + 231 + 174 = 865.00$$

$$\text{شاخ II} : 828 + 677.60 + 481.40 = 1987.00$$

$$\text{شاخ III} : 644 + 893.20 + 696 = 2233.20$$

$$865.00 + 1987.00 + 2233.20 = 5085.20$$

جواب: شاخوں کی آمدنی \$865.00، \$1,987.00 اور \$2,233.20؛ کل روزانہ آمدنی **\$5,085.20**۔

عام غلطی

اگر قیمتوں کو 1×3 سطر کے طور پر دیا جائے تو SP کی ضرب ممکن ہی نہیں۔ کاپی پر لکھیے: "SP کے ابعاد میل نہیں کھاتے، اس لیے SP^t نکالا گیا"۔ ممتحن اسی مشاہدے کے نمبر دیتا ہے۔

یونٹ 6: محدد اور معکوس

ہم عامل، معکوس، کریمر

ہم عامل $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$، جہاں M_{ij} وہ محدد ہے جو سطر i اور ستون j حذف کرنے کے بعد بچے۔ علامتوں کا نقشہ:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_j a_{ij} C_{ij}, \qquad \operatorname{adj} A = [C_{ij}]^t, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

کریمر کا اصول: $Ax = b$ کے لیے $x_k = \dfrac{D_k}{D}$، جہاں $D = \det A$ اور D_k میں A کا kواں ستون b سے بدل دیا جاتا ہے۔ شرط یہ ہے کہ $D \neq 0$ ہو۔

محدد کے چار مختصر راستے

- اس سطر یا ستون سے پھیلائیے جس میں سب سے زیادہ صفر ہوں۔
- پوری سطر یا ستون کا مشترک عامل باہر نکل آتا ہے۔
- دو سطریں (یا ستون) یکساں یا متناسب ہوں تو $\det = 0$۔
- ایک سطر کا مضاعف دوسری میں جمع کرنے سے محدد نہیں بدلتا۔

سوال 16

محدد نکالیے:

(الف) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

(ب) $\begin{vmatrix} 2a & a & a \\ b & 2b & b \\ c & c & 2c \end{vmatrix}$

حل

(الف) دوسری سطر میں ایک صفر ہے، اسی سے پھیلائیے:

$$2\begin{vmatrix}1 & 0\\-3 & 5\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 5\end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{vmatrix} = 2(5) - 3(5) - 1(-5) = 10 - 15 + 5 = 0$$

محدد کا صفر ہونا بتاتا ہے کہ سطریں آپس میں وابستہ ہیں۔

(ب) پہلی سطر سے a، دوسری سے b اور تیسری سے c باہر نکالیے:

$$\begin{vmatrix}2a & a & a\\b & 2b & b\\c & c & 2c\end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 2(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2) = 6 - 1 - 1 = 4$$

$$\text{قدر} = 4abc$$

جواب: (الف) 0 (ب) $4abc$

سوال 17

$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 5\\1 & 5 & 12\end{pmatrix}$ کا معکوس ہم عاملوں کے طریقے سے نکالیے۔

حل

پہلے محدد:

$$\det A = 1(36-25) - 2(12-5) + 3(5-3) = 11 - 14 + 6 = 3 \neq 0$$

معکوس موجود ہے۔ ہم عامل نکال کر منقلب لیجیے (یہی ملحقہ ہے):

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ **پڑتال:** A کی پہلی سطر $(1,2,3)$ کو A^{-1} کے پہلے ستون $\frac{1}{3}(11,-7,2)^t$ سے ضرب دیجیے: $\frac{11-14+6}{3} = 1$۔ تیسری سطر $(1,5,12)$ کو اسی ستون سے: $\frac{11-35+24}{3} = 0$۔ درست ہے۔

جواب: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

عام غلطی

ملحقہ ہم عاملوں کے میٹرکس کا منقلب ہے۔ منقلب بھول جانے سے $AA^{-1} = I$ خاص طور پر غیر قطری خانوں میں ٹوٹتا ہے --- اسی لیے اوپر پڑتال میں ایک غیر قطری خانہ بھی جانچا گیا ہے، صرف قطری نہیں۔

سوال 18

کریمر کے اصول سے حل کیجیے:

$$2x + y + 3z = 3, \qquad x + y - 2z = 0, \qquad -3x - y + 2z = -4$$

حل

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-2) - 1(2-6) + 3(-1+3) = 0 + 4 + 6 = 10$$

$D \neq 0$، اس لیے کریمر کا اصول لاگو ہوتا ہے۔ ایک ایک ستون کو دائیں طرف کے $(3, 0, -4)^t$ سے بدلیے:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 20, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -16, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{20}{10} = 2, \qquad y = \frac{-16}{10} = -\frac{8}{5}, \qquad z = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

✓ **پڑتال:** پہلی مساوات: $4 - \frac{8}{5} + \frac{3}{5} = 4 - 1 = 3$۔ دوسری: $2 - \frac{8}{5} - \frac{2}{5} = 2 - 2 = 0$۔ تیسری: $-6 + \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = -6 + 2 = -4$۔ تینوں پوری ہوتی ہیں۔

جواب: $x = 2$، $y = -\frac{8}{5}$، $z = \frac{1}{5}$

سوال 19

کریمر کے اصول سے حل کیجیے:

$$x + y = 2, \qquad 2x - z = 1, \qquad 2y - 3z = -1$$

حل

سب سے پہلے غائب متغیرات کے صفر عامل لکھ لیجیے، ورنہ اعداد غلط ستون میں چلے جائیں گے:

$$x + y + 0z = 2, \qquad 2x + 0y - z = 1, \qquad 0x + 2y - 3z = -1$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1(0+2) - 1(-6-0) + 0 = 2 + 6 = 8$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 8, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 8, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{8}{8} = 1, \qquad y = \frac{8}{8} = 1, \qquad z = \frac{8}{8} = 1$$

✓ **پڑتال:** $1 + 1 = 2$؛ $2(1) - 1 = 1$؛ $2(1) - 3(1) = -1$۔ تینوں درست۔

جواب: $x = 1$، $y = 1$، $z = 1$

عام غلطی

کریمر لگانے سے پہلے ہمیشہ D نکالیے۔ اگر $D = 0$ ہو تو یہ اصول لاگو ہی نہیں ہوتا، اور درست جواب اعداد نہیں بلکہ نظام کے بارے میں ایک بیان ہوتا ہے: "کوئی حل نہیں" یا "لامتناہی حل"۔ صفر محدد والے نظام سے اعداد نکل آنا اس بات کی علامت ہے کہ کہیں حساب کی غلطی ہوئی ہے۔

یونٹ 7: حد اور تفرق

حد کی تین صورتیں، اور ہر ایک کا علاج

- **تعویض چل جائے:** اگر f نقطہ a پر متصل ہو تو $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$۔ ہر بار پہلے یہی آزمائیے۔
- $\frac{0}{0}$ **کی صورت:** صفر بننے والے عامل منسوخ ہوتے ہیں۔ تحلیل کیجیے، پھر دوبارہ تعویض۔
- $x \to \infty$**:** شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو نسب نما کی سب سے بڑی قوت سے تقسیم کیجیے، پھر $\frac{1}{x^n} \to 0$ لگائیے۔

تفرق کے اصول:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}, \qquad (uv)' = u'v+uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}, \qquad \big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\,g'(x)$$

سوال 20

حد نکالیے: **(الف)** $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-x-6}$ **(ب)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^3}{x^3-1}$

حل

(الف) تعویض سے $\frac{81-81}{9-3-6} = \frac{0}{0}$ آتا ہے۔ دونوں کی تحلیل کیجیے --- اوپر دو مربعوں کا فرق دو بار لگتا ہے:

$$x^4-81 = (x^2-9)(x^2+9) = (x-3)(x+3)(x^2+9), \qquad x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$$

مشترک عامل $(x-3)$ منسوخ ہو جاتا ہے:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x^2+9)}{x+2} = \frac{(6)(18)}{5} = \frac{108}{5} = 21.6$$

(ب) $x \to \infty$ پر یہ $\frac{\infty}{\infty}$ کی صورت ہے۔ اوپر اور نیچے دونوں کو x^3 سے تقسیم کیجیے:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^3}-3}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{0-3}{1-0} = -3$$

مختصر راستہ: برابر درجے والے کثیر رقمی کسر کی حد سرکردہ عاملوں کا تناسب ہوتی ہے، یعنی $\frac{-3}{1}$۔

جواب: **(الف)** $\frac{108}{5} = 21.6$ **(ب)** -3

سوال 21

k کی وہ قدر نکالیے جس کے لیے $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود ہو، جہاں

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 2 \\ x^3 + k(x+1), & x \geq 2 \end{cases}$$

حل

حد تبھی موجود ہوتی ہے جب دونوں یک طرفہ حدیں برابر ہوں:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 - 2 = 0, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 8 + 3k$$

برابر رکھیے:

$$8 + 3k = 0 \implies k = -\frac{8}{3}$$

✓ **پڑتال:** $k = -\frac{8}{3}$ رکھنے پر $f(2^+) = 8 - 8 = 0 = f(2^-)$۔ حد موجود ہے اور 0 کے برابر ہے --- بلکہ $f(2) = 0$ بھی ہے، اس لیے فعل وہاں متصل بھی ہو جاتا ہے۔

جواب: $k = -\frac{8}{3}$

سوال 22

x اکائیوں کی لاگت $C(x) = x^2 - 5x + 80$ ہے۔ **(الف)** 10 اور 15 کے درمیان تبدیلی کی اوسط شرح نکالیے۔ **(ب)** 12 اکائیوں پر تبدیلی کی آنی شرح نکالیے۔

حل

(الف) اوسط شرح دو نقطوں کو ملانے والے وتر کا میلان ہے:

$$C(15) = 225 - 75 + 80 = 230, \qquad C(10) = 100 - 50 + 80 = 130$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{230 - 130}{15 - 10} = \frac{100}{5} = 20$$

(ب) آنی شرح مشتق ہے، یعنی ایک ہی نقطے پر مماس کا میلان۔ یہی حاشیائی لاگت کہلاتی ہے:

$$C'(x) = 2x - 5 \implies C'(12) = 24 - 5 = 19$$

جواب: (الف) 20 فی اکائی (ب) $C'(12) = 19$ فی اکائی

عام غلطی

"اوسط شرح" کے لیے دو نقطے اور تفریق چاہیے؛ "آنی شرح" کے لیے ایک نقطہ اور مشتق۔ یہ الگ الگ مقداریں ہیں اور یہاں الگ جواب دیتی ہیں (20 بمقابلہ 19)۔ حصہ (الف) میں تفرق کرنا یا حصہ (ب) میں C میں تعویض کرنا غلط سوال کا جواب ہے۔

یونٹ 8: جزوی مشتق

دوسرے متغیر کو ثابت رکھیے

f_x نکالنے کے لیے x کے حوالے سے تفرق کیجیے اور y کو ایک عدد سمجھیے۔ f_y کے لیے x کو عدد سمجھیے۔ تفرق کے تمام معمول کے اصول جوں کے توں لاگو رہتے ہیں۔

دوسرے مشتق کی جانچ ($f_x = f_y = 0$ والے نقطے پر)، جہاں $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$:

$D > 0$ اور $f_{xx} > 0$	$D > 0$ اور $f_{xx} < 0$	$D < 0$
اصغر (کم سے کم)	اعظم (زیادہ سے زیادہ)	زینی نقطہ

$D = 0$ ہو تو جانچ کوئی فیصلہ نہیں دیتی۔

سوال 23

اگر $z = x^2 - y^2 + 2xy$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$۔

حل

x کے حوالے سے (y ثابت، اس لیے $-y^2$ ختم اور $2xy$ سے $2y$):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y \implies \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

y کے حوالے سے (x ثابت، اس لیے x^2 ختم اور $2xy$ سے $2x$):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2x \implies \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

جمع کیجیے:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + (-2) = 0$$

ایسا فعل ہم آہنگ (harmonic) کہلاتا ہے۔ غور کیجیے کہ عبوری رقم $2xy$ دونوں دوسرے مشتقوں میں کچھ نہیں ڈالتی۔

جواب: $z_{xx} = 2$ اور $z_{yy} = -2$، لہٰذا $z_{xx} + z_{yy} = 0$۔

سوال 24

ایک کمپنی کا منافع $P(x, y) = 1200 + 80x - 2x^2 + 100y - y^2$ ہے، جہاں x محنت اور y اشیا کی فی اکائی لاگت ہے۔ منافع کو زیادہ سے زیادہ کرنے والے x اور y اور زیادہ سے زیادہ منافع نکالیے۔

حل

یہاں xy کی رقم نہیں، اس لیے دونوں متغیر الگ الگ بہتر ہوتے ہیں:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 80 - 4x = 0 \implies x = 20, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 100 - 2y = 0 \implies y = 50$$

دوسرے مشتق کی جانچ:

$$P_{xx} = -4, \quad P_{yy} = -2, \quad P_{xy} = 0, \qquad D = (-4)(-2) - 0 = 8 > 0, \quad P_{xx} < 0$$

یعنی یہ اعظم (زیادہ سے زیادہ) ہے۔

$$P(20, 50) = 1200 + 1600 - 800 + 5000 - 2500 = 4500$$

✓ **پڑتال:** کسی بھی متغیر کو ہلانے سے منافع گھٹتا ہے: $P(21,50) = 4498$ اور $P(20,51) = 4499$۔

جواب: $x = 20$، $y = 50$؛ زیادہ سے زیادہ منافع **4,500**۔

عام غلطی

صرف $P_x = 0$ اور $P_y = 0$ لکھ کر "اعظم" کہہ دینا کافی نہیں۔ دوسرے مشتق کی جانچ ہی اعظم، اصغر اور زینی نقطے میں فرق کرتی ہے، اور اس کے نمبر الگ ملتے ہیں۔

یونٹ 9: بہتر بندی

کاروبار کے چار فعل

$$R(x) = x \cdot p(x), \qquad P(x) = R(x) - C(x), \qquad \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

ان کے حاشیائی روپ مشتق ہیں: $MR = R'$، $MC = C'$۔ منافع وہاں زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے جہاں $P' = 0$ یعنی $MR = MC$ ہو، بشرطیکہ $P'' < 0$ ہو۔

سوال 25

x اکائیوں کی کل لاگت $c = 0.03x^2 + 8x + 300$ ہے۔ کس پیداوار پر فی اکائی اوسط لاگت کم سے کم ہو گی؟

حل

اوسط لاگت کل لاگت تقسیم پیداوار ہے:

$$\bar{c}(x) = \frac{0.03x^2 + 8x + 300}{x} = 0.03x + 8 + \frac{300}{x}$$

تفرق کر کے صفر رکھیے:

$$\bar{c}\,'(x) = 0.03 - \frac{300}{x^2} = 0 \implies x^2 = \frac{300}{0.03} = 10{,}000 \implies x = 100$$

(مثبت جڑ، کیونکہ پیداوار منفی نہیں ہو سکتی۔)

$$\bar{c}''(x) = \frac{600}{x^3} > 0 \quad \text{لہذا یہ اصغر ہے}$$

$$\bar{c}(100) = 3 + 8 + 3 = 14$$

✓ **پڑتال:** $\bar{c}(90) = 14.03$ اور $\bar{c}(110) = 14.03$ --- دونوں 14 سے زیادہ ہیں۔ نیز اصغر پر حاشیائی لاگت اوسط لاگت کے برابر ہوتی ہے: $c'(100) = 0.06(100) + 8 = 14$۔ یہ ہمیشہ سچ ہے اور بہترین پڑتال ہے۔

جواب: 100 اکائیوں پر اوسط لاگت کم سے کم ہوتی ہے، اور وہاں اوسط لاگت \$14 فی اکائی ہے۔

سوال 26

طلب $p = 52 - 0.02x$ اور لاگت $c(x) = 400 + 40x$ ہے۔ کس پیداوار پر منافع زیادہ سے زیادہ ہو گا؟ اس وقت قیمت کیا ہو گی اور منافع کتنا؟

حل

آمدنی قیمت ضرب مقدار ہے:

$$R(x) = x(52 - 0.02x) = 52x - 0.02x^2$$

$$P(x) = R(x) - c(x) = 52x - 0.02x^2 - 400 - 40x = 12x - 0.02x^2 - 400$$

$$P'(x) = 12 - 0.04x = 0 \implies x = 300, \qquad P''(x) = -0.04 < 0 \text{ (اعظم)}$$

$$p = 52 - 0.02(300) = 46, \qquad P(300) = 3600 - 1800 - 400 = 1400$$

✓ **پڑتال:** $MR = MC$ سے بھی: $52 - 0.04x = 40$ دیتا ہے $x = 300$ --- وہی پیداوار، مگر معاشی اصول سے۔

جواب: پیداوار 300 اکائیاں، قیمت \$46 فی اکائی، اور زیادہ سے زیادہ منافع \$1,400۔

عام غلطی

زیادہ سے زیادہ منافع اور زیادہ سے زیادہ آمدنی ایک چیز نہیں۔ یہاں آمدنی $x = 1300$ پر عروج پر ہوتی ہے (جہاں $52 - 0.04x = 0$)، جو منافع بخش 300 سے بہت آگے ہے۔ اسی فعل کو بہتر کیجیے جس کا نام سوال میں ہو۔

سوال 27

ایک کیبل کمپنی کے 500 صارفین ہیں جو ماہانہ \$20 دیتے ہیں۔ ہر \$0.60 کمی پر 200 نئے صارفین آتے ہیں۔ کس نرخ پر آمدنی زیادہ سے زیادہ ہو گی اور وہ آمدنی کتنی ہو گی؟

حل

فرض کیجیے n دفعہ \$0.60 کی کمی کی گئی۔ تب

$$\text{نرخ} = 20 - 0.6n, \qquad \text{صارفین} = 500 + 200n$$

$$R(n) = (20 - 0.6n)(500 + 200n) = 10000 + 3700n - 120n^2$$

$$R'(n) = 3700 - 240n = 0 \implies n = \frac{3700}{240} = 15.4167, \qquad R'' = -240 < 0 \ (\text{اعظم})$$

$$\text{نرخ} = 20 - 0.6(15.4167) = 10.75, \qquad R = 38{,}520.83$$

مکمل عدد والا جواب۔ n پوری تعداد میں ہونا چاہیے اور صارفین بھی پورے۔ دونوں قریبی قدریں آزمائیے:

n	نرخ	صارفین	آمدنی
15	00.\$11	3,500	\$38,500
16	40.\$10	3,700	\$38,480

جواب: متصل (continuous) حل: نرخ **\$10.75** اور آمدنی **\$38,520.83**۔ اگر کمی پوری \$0.60 کے حساب سے ہو تو بہترین نرخ **\$11.00** ماہانہ اور آمدنی **\$38,500**۔

عام غلطی

متغیر کی تعریف لکھ کر شروع کیجیے --- "فرض کیجیے n دفعہ \$0.60 کی کمی کی گئی" --- اور نرخ اور صارفین دونوں کو اسی کے حوالے سے لکھیے، پھر ضرب دیجیے۔ اس سوال میں زیادہ تر نمبر تفرق شروع ہونے سے پہلے ضائع ہوتے ہیں۔

فارمولا شیٹ

نو یونٹوں کا سارا مواد دو صفحوں پر۔ ہر اصول کی شکل اور اس کے استعمال کا موقع یاد رکھیے؛ حساب آسان حصہ ہے۔

احتمال (یونٹ 1--2)

اصول	فارمولا	کب استعمال کریں
متمم	$P(A') = 1 - P(A)$	"کم از کم ایک"، "نہیں"
جمع (عام)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	"یا"، واقعات میں اشتراک
جمع (خارج)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	"یا"، $A \cap B = \varnothing$
ضرب (آزاد)	$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$	"اور"، واپسی کے ساتھ
ضرب (وابستہ)	$P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)$	"اور"، بغیر واپسی
مشروط	$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$	"بشرطیکہ"
آزادی کی جانچ	$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$	آزادی ثابت یا رد کرنے کو
دو ذی حدی	$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $E(X) = np$	ثابت p، واپسی کے ساتھ
Hypergeometric	$P(X = x) = \dfrac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	محدود تھیلا، بغیر واپسی
ہر منقطع تقسیم	$\sum_x P(X = x) = 1$, $E(X) = \sum_x x\,P(X = x)$	ہمیشہ --- پڑتال کے طور پر

مساوات اور خطوط (یونٹ 4--3)

دو درجی فارمولا	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$؛ ممیز $0 >$ دو جڑیں، $0 =$ ایک، $0 <$ کوئی حقیقی نہیں
مربع مکمل کرنا	$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$
عدم مساوات	منفی عدد سے ضرب یا تقسیم پر علامت الٹ جاتی ہے
مطلق قدر (مساوات)	$u = v \iff |u| = |v|$ یا $u = -v$
مطلق قدر ($\leq$)	$-a \leq u \leq a \iff |u| \leq a$ --- ایک وقفہ
مطلق قدر ($\geq$)	$u \geq a \iff |u| \geq a$ یا $u \leq -a$ --- دو وقفے
فاصلہ	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
وسطی نقطہ	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
میلان	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
نقطہ--میلان	$y - y_1 = m(x - x_1)$؛ $y = mx + c$
متوازی / عمود	$m_1 = m_2$؛ $m_1 m_2 = -1$ (عمودی خطوط پر لاگو نہیں)
خطی لاگت	$C(x) =$ (فی اکائی متغیر) $x +$ (ثابت لاگت)
توازن	طلب = رسد رکھ کر q نکالیے، پھر p میں تعویض

میٹرکس اور محدد (یونٹ 6--5)

ابعاد کا میل	$A_{m\times n}B_{n\times p}$ ممکن ہے اور نتیجہ $m \times p$
منقلب کے اصول	$(A^t)^t = A,\ (A+B)^t = A^t + B^t,\ \boxed{(AB)^t = B^t A^t}$
معکوس کے اصول	$(A^{-1})^{-1} = A,\ \boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$
2×2 محدد	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
2×2 معکوس	$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
ہم عامل	$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$؛ علامتیں $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$
محدد	$\det A = \sum_j a_{ij}C_{ij}$ کسی بھی سطر یا ستون سے
ملحقہ	$\operatorname{adj} A = [C_{ij}]^t$ --- ہم عاملوں کا منقلب
معکوس	$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$، شرط $\det A \neq 0$
کریمر کا اصول	$x_k = \dfrac{D_k}{D}$؛ D_k میں kواں ستون b سے بدلیں
$\det = 0$ کا مطلب	منفرد حل نہیں: یا کوئی حل نہیں، یا لامتناہی
محدد کا ضربی اصول	$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

کیلکولس (یونٹ 9--7)

قوت	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$ --- جڑوں اور معکوسوں کو پہلے قوت میں لکھیے
حاصل ضرب	$(uv)' = u'v + uv'$
تقسیم	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ --- اوپر والے کا مشتق پہلے
زنجیری	$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\,g'(x)$ --- باہر پہلے، پھر اندر سے ضرب
تفاعلی	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u = e^u u'$، $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{u'}{u}$
∞ پر حد	نسب نما کی سب سے بڑی قوت سے تقسیم کیجیے
$\frac{0}{0}$ کی صورت	تحلیل اور منسوخی، پھر دوبارہ تعویض
حد کا وجود	$\lim_{x\to a^-} f = \lim_{x\to a^+} f$
جزوی مشتق	ایک متغیر میں تفرق، دوسرا ثابت
Clairaut	$f_{xy} = f_{yx}$ --- مخلوط مشتقوں کی مفت پڑتال
ساکن نقطہ	$f'(x) = 0$ (یا دو متغیر میں $f_x = f_y = 0$)
دوسرے مشتق کی جانچ	$f'' < 0$ اعظم، $f'' > 0$ اصغر، $f'' = 0$ بے نتیجہ
دو متغیر کی جانچ	$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$؛ $D > 0$ و $f_{xx} < 0$ اعظم، $f_{xx} > 0$ اصغر؛ $D < 0$ زینی
انعطافی نقطہ	$f'' = 0$ اور f'' کی علامت بدلے
آمدنی، منافع	$R = x\,p(x)$، $P = R - C$؛ اعظم جہاں $MR = MC$ اور $P'' < 0$
اوسط لاگت	$\bar{C} = \frac{C(x)}{x}$؛ اصغر پر $MC = \bar{C}$

آٹھ عام غلطیاں

یہ فہرست اس کتابچے کے تمام سرخ خانوں کا نچوڑ ہے، یونٹوں کی ترتیب سے:

۱. **اشتراک والے واقعات پر $P(A)+P(B)$ لگانا۔** سادہ جمع کا اصول صرف باہم خارج واقعات پر چلتا ہے؛ ورنہ اشتراک گھٹانا پڑتا ہے۔

۲. **"صرف ایک" میں گنتی بھول جانا۔** $\binom{n}{1}$ یہ گنتا ہے کہ وہ ایک کون ہے۔ "سب" اور "کوئی نہیں" میں یہ ضرب نہیں لگتی۔

۳. **"بغیر واپسی" پر دو ذی حدی لگا دینا۔** یہ الفاظ hypergeometric کی طرف اشارہ ہیں اور جواب واضح طور پر بدل دیتے ہیں۔

٤. **منفی عدد سے ضرب یا تقسیم پر عدم مساوات کی علامت نہ الٹنا۔**

٥. $(AB)^t = A^tB^t$ **اور** $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ **لکھنا۔** دونوں میں ترتیب الٹ جاتی ہے۔ دونوں پورے سوال کے برابر ہیں۔

٦. **ملحقہ بناتے وقت ہم عاملوں کا منقلب بھول جانا۔** $AA^{-1}=I$ کی پڑتال کسی غیر قطری خانے پر کیجیے، صرف قطری پر نہیں۔

٧. **کریمر لگانے سے پہلے D نہ نکالنا۔** $D=0$ ہو تو اصول لاگو نہیں ہوتا اور درست جواب نظام کے بارے میں ایک بیان ہوتا ہے۔

٨. **$f'=0$ پر رک جانا۔** دوسرے مشتق کی جانچ ہی اعظم، اصغر اور زینی نقطے میں فرق کرتی ہے، اور اس کے نمبر الگ ملتے ہیں۔

اگر وقت کم ہو

یونٹ 4، 5، 6، 7 اور 9 مل کر زیادہ تر نمبر اور تمام طویل سوالات اٹھاتے ہیں۔ ان میں سب سے زیادہ نفع بخش پانچ مہارتیں یہ ہیں:

۱. 3×3 نظام پر کریمر کا اصول، بشمول $D=0$ والی صورت۔

۲. ہم عاملوں سے 3×3 کا معکوس، ملحقہ کے منقلب سمیت۔

۳. حاصل ضرب، تقسیم اور زنجیری اصول --- خاص طور پر تقسیم کے اندر زنجیری۔

٤. منافع، آمدنی یا اوسط لاگت کی بہتر بندی، دوسرے مشتق کی جانچ کے ساتھ۔

۵. دو نقطوں سے، یا ایک نقطے اور عمودیت کی شرط سے، خط کی مساوات نکالنا۔

ان پانچ کو حل ڈھانپ کر متعلقہ یونٹ سے دہرائیے۔ پانچ مہارتیں جو بغیر دیکھے درست آ جائیں، نو یونٹ سرسری پڑھ لینے سے کہیں زیادہ قیمتی ہیں۔

تفصیلی ایڈیشن۔ تمام نو یونٹوں کے مکمل حل، ہر سوال کی پڑتال، خاکے اور اضافی مشق کے لیے دیکھیے AIOU_1429_Solved_QuestionBank.pdf (انگریزی، 84 صفحات)۔

ماخذ۔ کاروباری ریاضی، کورس کوڈ 5405/1429، یونٹ 1--9، شعبۂ ریاضی، علامہ اقبال اوپن یونیورسٹی، اسلام آباد، اشاعت 2023۔